

基于本征正交分解的无叶扩压器流动稳定性 Galerkin 降阶模型

张赫辉¹, 薛翔², 竺晓程¹, 杜朝辉¹

(1. 上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240; 2. 上海空间推进研究所, 发动机工程技术研究中心, 上海 201112)

摘要: 将分析湍流拟序结构中的本征正交分解技术运用到离心压气机无叶扩压器的流动稳定性分析中, 并将其与 Galerkin 投影法相结合建立了无叶扩压器内部流场的降阶模型。使用本征正交分解技术提取无叶扩压器在某来流入口角下非定常流场的主要流动模态, 将流动控制方程通过 Galerkin 方法投影至由有限阶本征正交模态所组成的空间上, 得到无叶扩压器流动稳定性降阶模型。计算结果表明: 该模型可用于判断不同来流入口角下的扩压器流动稳定性, 并将降阶模型的计算结果与流场数值模拟结果和线性稳定性预测结果进行对比, 验证了此降阶方法的合理性。

关键词: 无叶扩压器; 流动稳定性; 降阶模型; 本征正交分解; Galerkin 投影法

中图分类号: TH452 文献标识码: A DOI: 10.16146/j.cnki.rndlgc.2021.08.003

[引用本文格式] 张赫辉, 薛翔, 竺晓程, 等. 基于本征正交分解的无叶扩压器流动稳定性 Galerkin 降阶模型[J]. 热能动力工程, 2021, 36(8): 16-21. ZHANG He-hui, XUE Xiang, ZHU Xiao-cheng, et al. Galerkin reduced-order model for flow stability of vaneless diffuser based on proper orthogonal decomposition[J]. Journal of Engineering for Thermal Energy and Power, 2021, 36(8): 16-21.

Galerkin Reduced-order Model for Flow Stability of Vaneless Diffuser Based on Proper Orthogonal Decomposition

ZHANG He-hui¹, XUE Xiang², ZHU Xiao-cheng¹, Du Zhao-hui¹

(1. School of Mechanical and Power Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, Post Code: 200240;
2. Shanghai Institute of Space Propulsion, Engine Engineering Technology Research Center, Shanghai, China, Post Code: 201112)

Abstract: The proper orthogonal decomposition (POD) technique in the analysis of turbulent coherent structure is applied to the flow stability analysis of the centrifugal compressor vaneless diffuser, and the combination of this technique and the Galerkin projection method can establish a reduced-order model of the flow field inside the vaneless diffuser. The main flow modes of the unsteady flow field inside the vaneless diffuser at a certain inflow inlet angle are extracted by the proper orthogonal decomposition technique, and the flow control equations are projected to the space composed of a finite number of proper orthogonal modes by the Galerkin method, then a reduced-order model of the flow stability of the vaneless diffuser is obtained. The calculation results show that the model can judge the flow stability of the diffuser at different inflow inlet angles. The calculation results of the reduced-order model compare with the numerical simulation results of the flow field and the linear stability prediction results to verify the rationality of the reduced-order method.

Key words: vaneless diffuser, flow stability, reduced-order model, proper orthogonal decomposition, Galerkin projection method

引 言

无叶扩压器较有叶扩压器拥有更简单的几何结构和更广的稳定工作范围,使其广泛应用于离心压气机中^[1]。但当来流入口角小于临界角时,其内部出现的流动失稳现象会造成剧烈的载荷变化,严重影响压气机的安全运行^[2]。

长期以来,研究者从不同角度研究了无叶扩压器内部流动机理。Jansen^[3]最早提出了基于无粘流动的无叶扩压器扰动传播模型,将其与实验分析相结合后认为三维边界层流动分离导致了扩压器失稳。Frigne^[4]根据其建立的非线性模型认为扩压器内部无粘核心流与壁面边界层间相互作用会导致旋转失速。而 Abdelhamid^[5]和 Tsujimoto^[6]分别基于各自建立的二维线性无粘流动模型分析了扩压器失速现象,均认为失速主要受制于二维无粘流。Senoo 和 Kinoshita^[7]研究了边界层不对称发展条件下的扩压器流动,提出局部逆流未必能致其失速,并定义了旋转失速临界角和逆流临界角。Dou^[8]通过其发展的三维边界层计算方法,研究认为扩压器失速由发展至射流尾迹区的逆流引起。Ljevar^[9]建立了二维无粘不可压模型来研究无叶扩压器内旋转失速,认为流动稳定性受入口处的射流尾迹强度比影响很小。Megerle^[10]在均匀速度进口条件下发现二维无叶扩压器旋转失速现象,从而验证了射流尾迹结构并非旋转失速的必要条件。Hu^[11]基于小扰动假设建立了无粘流动下的无叶扩压器稳定性和敏感性分析方法。赵博^[12]和吴蔚^[13]分别对扩压器非定常数值计算结果做本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition, POD)和动力模态分解(Dynamic Mode Decomposition, DMD),提取了无叶扩压器在不同流动状态下的模态特征。

POD 技术最早在 1967 年由 Lumley^[14]引入湍流的相干结构(模态)的研究中,之后丁杰^[15]、杨晓建^[16]都曾使用 POD 分析无叶扩压器内部非定常流动。Sirovich^[17]发现将 POD 与 Galerkin 投影法相结合可用于降阶流场模型的建立。后来的研究者将其应用于不同流场工况下的降阶分析中,如康伟^[18]对翼型绕流问题建立了 POD-Galerkin 降阶模型。Stabile^[19]将其应用到圆柱绕流问题上。Lorenzi^[20]对

二维腔体进行了 POD-Galerkin 降阶分析等。

本文基于宽无叶扩压器流动稳定性受二维无粘核心流控制的观点,通过数值模拟得到了二维无叶扩压器在某角度下的非定常流场数据,并采用 POD 技术提取流动模态。借助 Galerkin 投影法,依据“小扰动”假设对二维无叶扩压器建立低阶的数学模型。通过该模型判断不同入口角下扩压器内部流动状态,并获得临界角范围,将模型计算结果与数值模拟、线性稳定性预测结果进行对比。

1 数值模拟

赵博、吴蔚^[12-13]认为 Megerle 的数值方法可以很好地还原无叶扩压器无粘流基本特征。故本文将基于此方法开展非定常计算。

如图 1(a)所示,研究对象是半径比为 1.8 的平行壁面二维无叶扩压器。图 1(b)中 V 表示流动速度, V_r 为入口径向速度, V_c 为入口周向速度,其夹角所构成的入口角 $\alpha = \arctan(V_r/V_c)$ 为流场稳定性的控制变量。在图 1(b)中“+”所示处设置有径向速度监控点,用于观察流动过程速度波动情况。

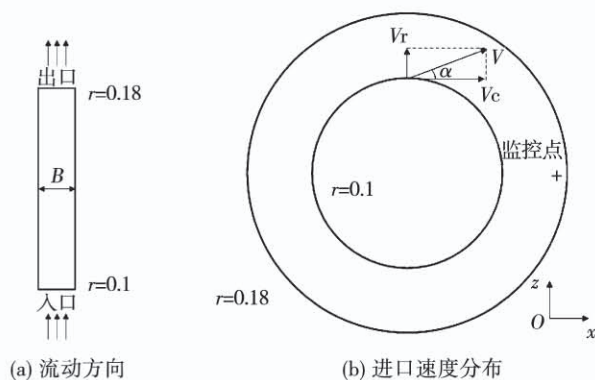
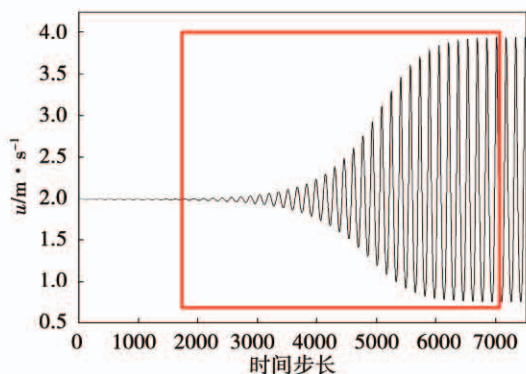


图 1 无叶扩压器流动模型示意图(m)

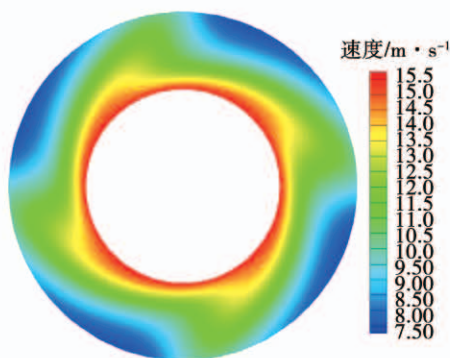
Fig.1 Schematic diagram of the flow model of vaneless diffuser (m)

计算采用 SST 湍流模型,工质为水,其中选用水模型作不可压流动分析的合理性已得到 Ljevar^[9]和 Gyamarthy^[21]验证。边界条件选择均匀速度入口和静压出口。模型在做网格无关性验证后选择 60 万网格。参数设置为:时间步长 0.000 25 s;参考压力 0.1 MPa;进口速度:轴向速度 0 m/s,径向速度 3.675 m/s,周向速度 15.22 m/s(即入口角 $\alpha = 13.4^\circ$);出口静压 0 Pa。

非定常计算中监控点处的径向速度随时间变化曲线如图 2(a) 所示。由于其随流动发展周期性变化幅值趋于发散, 入口角 13.4° 时扩压器被认为处于失稳状态。最终时刻的速度云图如图 2(b) 所示, 存在四个周向扰动结构。图 3 为在入口角 14.7° 时的计算结果, 此时为周向流动均匀的稳定工况。



(a) 监控点径向速度变化曲线



(b) 速度云图

图 2 入口角 13.4° 时非定常计算结果

Fig. 2 The results of unsteady calculation when the inlet angle is 13.4°

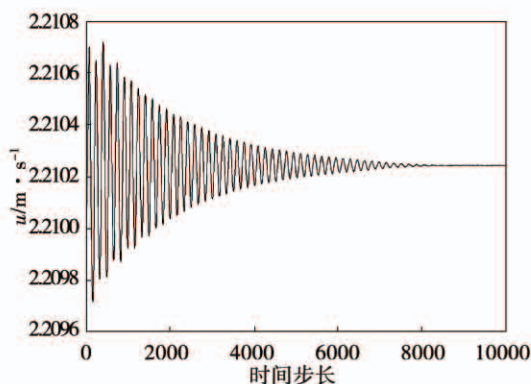
2 Galerkin 降阶模型

POD 将扰动变量分解为关于空间的函数(模式 $\vec{v}_i$) 和关于时间的函数(时间系数 a_i) 的组合^[22] ($i = 1, 2, \dots, M$, M 为快照数), 因此速度场可表示为:

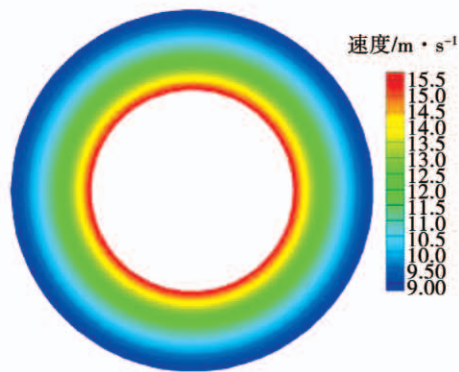
$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} + \vec{u}' = \vec{\bar{u}} + \sum_{i=1}^M a_i(t) \vec{v}_i(r, \theta) \quad (1)$$

对于二维无叶扩压器而言, $\vec{v}_i = \alpha_i \cdot \vec{e}_r + \beta_i \cdot \vec{e}_\theta$, α_i 和 β_i 分别为径向和周向速度模式。POD 模式 α_i 和 β_i 在矢量意义下标准正交。

针对如图 2(a) 框内所包含的流场数据采用 Sirovich 快照 POD 方法^[23], 基于文献[12]计算得到径向速度和周向速度本征正交模式, 而后进行 Galerkin 降阶建模。



(a) 监控点径向速度变化曲线



(b) 速度云图

图 3 入口角 14.7° 时非定常计算结果

Fig. 3 The results of unsteady calculation when the inlet angle is 14.7°

Galerkin 投影法本质上是利用 POD 模式的标准正交性, 把物理方程投影至由有限阶 POD 模式组成的空间, 使其转化为关于时间系数的常微分方程, 同时实现物理场降阶表达^[24]。

对于二维无叶扩压器无粘流, 控制方程为:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

对速度 $\vec{u}$ 进行式(1)所示的替换后, 将方程投影至由速度模式组成的空间。基于 POD 模式的标准正交性 $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, 速度对时间的偏导与任一速度模式的内积:

$$\left(\frac{\partial (\vec{u} + \vec{u}')}{\partial t}, \vec{v}_i \right) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{da_j}{dt} \vec{v}_j, \vec{v}_i \right) = \frac{da_i}{dt} \quad (4)$$

此时关于速度的偏微分转化成为关于时间系数的常微分,得到如式(5)所示关于时间系数 a_i ($i = 1, 2, \dots, N$, N 为模态阶数) 常微分方程组:

$$\frac{da_i}{dt} + ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}, \vec{v}_i) + \left(\frac{1}{\rho} \nabla P, \vec{v}_i \right) = 0 \quad (5)$$

考虑到扰动在流动发展过程中的放大或衰减(如图 2(a) 和图 3(a) 所示)可用于判断流场稳定性,因而本文的无叶扩压器的流动稳定性降阶模型直接针对扰动流 $\vec{u}$ 建立。 $\vec{u}$ 对应的控制方程可由 $\vec{u}$ 的方程与 $\vec{u}$ 的方程相减得到,其中平均流 $\vec{u}$ 满足式(2)、(3)所示控制方程。扰动流相对平均流视作无穷小扰动,故可忽略掉方程中的二阶扰动项。此时的扰动流控制方程为:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (UR) \cdot \vec{e}_r + (UC) \cdot \vec{e}_c + \frac{1}{\rho} \nabla P' = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } UR = & \vec{u}_r \frac{\partial u_r'}{\partial r} + u_r' \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial \theta} + \bar{u}_c' \frac{\partial u_r'}{r \partial \theta} + u_c' \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial \theta} \\ & - \frac{2 \bar{u}_c \cdot u_c'}{r}, UC = \bar{u}_r \frac{\partial u_c'}{\partial r} + u_r' \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial r} + \bar{u}_c \frac{\partial u_c'}{r \partial \theta} + u_c' \frac{\partial \bar{u}_c}{r \partial \theta} + \\ & \frac{\bar{u}_r \cdot u_c' + u_r' \cdot \bar{u}_c}{r} \end{aligned}$$

为减少投影后的控制方程数量,根据 POD 模式的特点,只选取有代表性的前 N 阶模态。

通常做内积后压力项可忽略不计^[25]。本算例中均匀速度进口、静压出口、且为不可压流动:

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla P', \vec{v}_i \right) = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} P' \vec{v}_i \cdot n dS - \frac{1}{\rho} \int_{\partial \Omega} P' \nabla \cdot \vec{v}_i d\Omega = 0 \quad (7)$$

最终,关于时间系数的 N 阶常微分方程组:

$$\frac{da_i}{dt} + \sum_{j=1}^N a_j (R_j \cdot \vec{e}_r + C_j \cdot \vec{e}_c, \vec{v}_i) = 0 \quad (8)$$

$$\text{其中, } R_j = \bar{u}_r \frac{\partial \alpha_j}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \alpha_j + \bar{u}_c \frac{\partial \alpha_j}{r \partial \theta} - \frac{2 \bar{u}_c}{r} \beta_j, C_j = \bar{u}_r$$

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial r} \alpha_j + \bar{u}_c \frac{\partial \beta_j}{r \partial \theta} + \frac{\bar{u}_c}{r} \alpha_j。$$

式(8)即为二维无叶扩压器流动降阶模型。

3 结果与讨论

图 4 为 POD 特征值(λ) 做对数后的结果,图 5 为模态云图。POD 特征值表征了模态能量的大小,

图 4 所示前 5 阶模态能量占比达 99.9% 以上,且其后的模态能量衰减迅速,因此可以认为前 5 阶模态包含了流场的主要流动特征且对流动起主要作用。故选择前 5 阶模态作 Galerkin 投影。

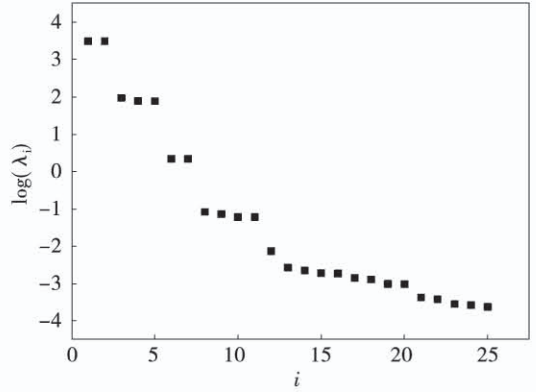


图 4 能量占比最高的 25 个特征值

Fig. 4 The top 25 eigenvalues of energy ratios

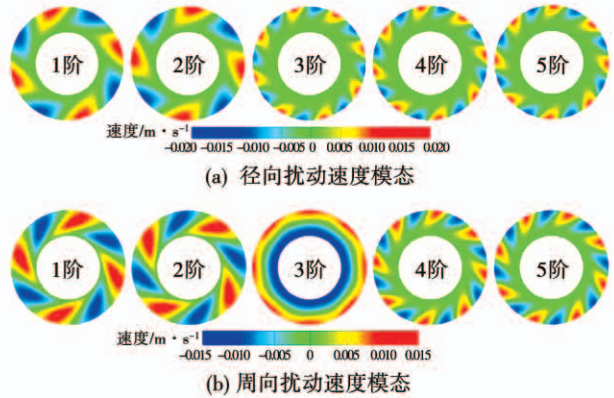


图 5 前 5 阶速度模态云图

Fig. 5 The cloud charts of first five-order velocity modes

从图 5 可知,能量占比最高的前两阶模态空间扰动波数均为 4,与图 2(b) 中流场扰动波数相同,可以认为前两阶模态在流动发展过程中起主导作用。故前两阶模态的时间系数变化趋势可用于判断流场稳定性。

基于入口角 13.4° 的流场前 5 阶模态建立降阶模型,前两阶模态时间系数 a_1, a_2 计算结果如图 6 所示。由图 6 可知,前两阶模态时间系数趋于发散,说明流动发展过程中扰动逐渐放大,由此判断入口角 13.4° 为失稳工况,与 CFD 结论一致。对比降阶模型与 POD 的计算结果,可以发现其频率和发展趋势基本一致。

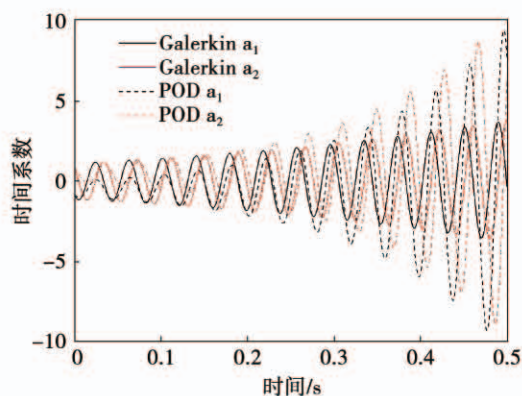


图6 入口角为 13.4° 时降阶模型计算结果与 POD 结果对比

Fig. 6 Comparison of the calculation results of the reduced-order model and the results of the POD method when the inlet angle is 13.4°

为进一步分析降阶方法的合理性,对不同模态阶数下的模型分别计算了第一阶模态频率,并与 CFD 结果相对比。结果表明,两阶模态的降阶模型计算结果与五阶、七阶模型结果完全相同,均为 26 Hz。验证了前两阶模态在流动稳定性中起决定性作用这一观点。且与 CFD 的计算结果 25.45 Hz 差别很小。此结果确保了降阶方法的合理性。

在保持入口角 13.4° 的流场模态不变的情况下,计算 $\alpha = 14.7^\circ$ 时模态时间系数的结果如图 7 所示。

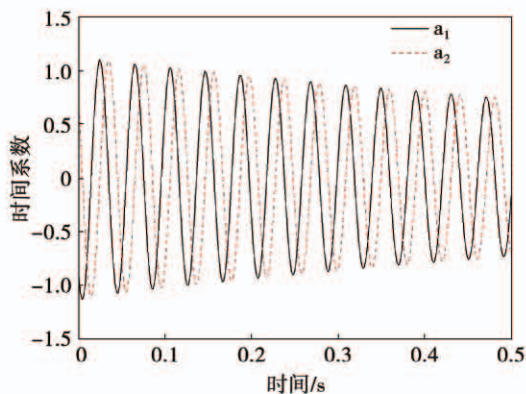


图7 入口角为 14.7° 时前两阶模态对应的时间系数
Fig. 7 Time coefficients of the first two-order modes when the inlet angle is 14.7°

由图 7 可知,入口角 14.7° 时无叶扩压器内处于稳定流动状态,这一结论与图 3 所示 CFD 结果相同,也进一步证明了降阶模型在扩压器流动稳定性

预测方面的可靠性。

在 13.4° 和 14.7° 之间通过二分法进行相应计算,确定临界角约为 14.35° ,接近文献[13]通过 CFD 得到的结论,同时也与文献[26]根据其建立的无粘三维稳定性模型得到的临界角 14.5° 的结论十分接近。

4 结 论

(1) 通过简化无叶扩压器内部流动结构,在 CFD 非定常计算结果的基础上使用 POD 提取流场模态,而后基于 POD 模态通过 Galerkin 投影法建立了二维无叶扩压器流场降阶模型。在判断扩压器流动稳定性的实际运算中,CFD 需要求解 60 万网格点对应的流场非线性偏微分方程组,耗时往往 10 h 以上;降阶模型仅需求解由 5 个常微分方程组成的线性方程组,数分钟即可得到结果,计算资源消耗更少、计算速度更快。

(2) 改变模型中的模态阶数,对流动稳定性起主导作用的一阶模态时间系数的频率均为 26 Hz,与 CFD 得到的 25.45 Hz 差别很小,且系数变化趋势相同,证明了基于有限阶模态建立降阶模型这一方法的有效性。同时模型作出的流场稳定性判定与 CFD 相同,且在临界角计算方面, 14.35° 的模型结果同样与 CFD 以及线性稳定性预测结果一致,从另一方面验证了降阶模型计算的可靠性。

(3) POD 结合 Galerkin 投影的方法对无叶扩压器内部流场进行降阶建模,此方法一方面直观地揭示了扩压器流动失稳的发展过程,对无叶扩压器流动失稳机理研究具有参考价值;另一方面为无叶扩压器流动稳定性控制研究提供了新的技术手段,如在模型方程中添加用于反映流动控制效果的源项,以此来评估其对无叶扩压器流动扩稳的效果。

参考文献:

- [1] 徐玉梅. 无叶扩压器旋转失速的机理与特性研究[D]. 浙江大学, 2015.
XU Yu-mei. Study on mechanisms and characteristics of rotating stall in vaneless diffuser[D]. Zhejiang University, 2015.
- [2] KINOSHITA Y, SENOO Y. Rotating Stall Induced in 89 vaneless diffusers of very low specific speed centrifugal blowers[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1985, 107(2): 514 - 519.

- [3] JANSSEN W. Rotating stall in a radial vaneless diffuser [J]. Journal of Fluids Engineering, 1964, 86(4): 750 – 758.
- [4] FRIGNE P. A theoretical model for rotating stall in the vaneless diffuser of a centrifugal compressor [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1985, 107(2): 507 – 513.
- [5] ABDELHAMID A N. Analysis of rotating stall in vaneless diffusers of centrifugal compressors [C]. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air. American Society of Mechanical Engineers, 1980, 79665: V01BT02A089.
- [6] TSUJIMOTO Y, YOSHIDA Y, Mori Y. Study of vaneless diffuser rotating stall based on two-dimensional inviscid flow analysis [J]. Journal of Fluids Engineering, 1996, 118(1): 123 – 127.
- [7] SENOO Y, KINOSHITA Y. Influence of inlet flow conditions and geometries of centrifugal vaneless diffusers on critical flow angle for reverse flow [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 1977, 99(1): 98 – 103.
- [8] DOU H S, MIZUKI S. Analysis of the flow in vaneless diffuser with large width to radius ratios [J]. Journal of Turbomachinery, 1998, 120: 194 – 201.
- [9] LJEVAR S, DE LANGE H C, VAN STEENHOVEN A A. Two-dimensional rotating stall analysis in a wide vaneless diffuser [J]. International Journal of Rotating Machinery, 2014, 2006(15): 3109 – 3126.
- [10] MEGERLE B. Unsteady aerodynamics of low-pressure steam turbines operating under low volume flow conditions [D]. Switzerland: Swiss federal Institute of Technology in Lausanne, 2014.
- [11] HU C, LIU H, ZHU X, et al. Dynamics of global instabilities in the vaneless diffuser: a numerical approach and its applications [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2018, 232(6): 1159 – 1170.
- [12] 赵 博, 吴 蔚, 竺晓程, 等. 二维无叶扩压器旋转失速的正交模态分析 [J]. 热能动力工程, 2020, 35(3): 122 – 128.
ZHAO Bo, WU Wei, ZHU Xiao-cheng, et al. Orthogonal modal analysis of rotating stall of two-dimensional vaneless diffuser [J]. Journal of Engineering for Thermal Energy and Power, 2020, 35(3): 122 – 128.
- [13] 吴 蔚, 赵 博, 竺晓程, 等. 基于 DMD 方法的无叶扩压器流动稳定性分析 [J]. 动力工程学报, 2020, 40(5): 365 – 370.
WU Wei, ZHAO Bo, ZHU Xiao-cheng, et al. Analysis of hydrodynamic stability in the vaneless diffuser based on dynamic mode decomposition [J]. Journal of Chinese Society of Power Engineering, 2020, 40(5): 365 – 370.
- [14] LUMLEY J L. The structure of inhomogeneous turbulent flows [J]. Atmospheric turbulence and radio wave propagation, 1967: 166 – 178.
- [15] 丁 杰. 离心压气机内不稳定流动的数值模拟与模态分析 [D]. 上海: 上海交通大学, 2017.
DING Jie. Numerical simulation and mode decomposition of unsteady flow in centrifugal compressor [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2017.
- [16] 杨晓建, 胡晨星, 竺晓程, 等. 离心压气机无叶扩压器非定常流动本征正交分解法 [J]. 上海交通大学学报, 2019, 53(12): 1450 – 1458.
YANG Xiao-jian, HU Chen-xing, ZHU Xiao-cheng, et al. Unsteady flow field study of vaneless diffuser in a centrifugal compressor using proper orthogonal decomposition method [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2019, 53(12): 1450 – 1458.
- [17] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 561 – 571.
- [18] 康 伟, 张家忠, 李凯伦. 利用本征正交分解的非线性 Galerkin 降维方法 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(11): 58 – 62, 67.
KANG Wei, ZHANG Jia-zhong, LI Kai-lun. Nonlinear galerkin method for dimension reduction using proper orthogonal decomposition [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(11): 58 – 62, 67.
- [19] STABILE G, HIJAZI S, MOLA A, et al. POD-galerkin reduced order methods for CFD using finite volume discretisation: vortex shedding around a circular cylinder [J]. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2017, 8(1): 210 – 236.
- [20] LORENZI S, CAMMI A, LUZZI L, et al. POD-galerkin method for finite volume approximation of Navier – Stokes and RANS equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 311: 151 – 179.
- [21] GYAMARTHY G, INDERBITZIN A, STAUBLI T. Visualization of rotating stall in full-size water model of a single stage centrifugal compressor [J]. La Houille Blanche, 2001(3): 40 – 45.
- [22] LUCHTENBURG D M, NOACK B R, SCHLEGEL M. An introduction to the POD galerkin method for fluid flows with analytical examples and MATLAB source codes [J]. Berlin Institute of Technology MB1, Muller-Breslau-Strabe, 2009, 11.
- [23] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures: part I – III [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 561 – 590.
- [24] HOLMES P, Lumley J L, BERBOOZ G, et al. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry [M]. Cambridge University Press, 2012.
- [25] LORENZI S, CAMMI A, LUZZI L, et al. POD-Galerkin method for finite volume approximation of Navier-Stokes and RANS equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 311: 151 – 179.
- [26] 胡晨星. 径向无叶扩压器流动稳定性与敏感性研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2019.
HU Chen-xing. Study on flow stability and sensitivity of the radial vaneless diffuser [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2019.