

组合层板在横向位移时的特性研究

王心丰 方鸿慧

(南京航空航天大学)

[摘要]用 Hellinger-Reissner 变分泛函导出了多层薄板的杂交单元模型,用杂交元对组合层板在横向位移时的特性进行了分析计算,并用实验进行了验证,说明了分析计算的正确性。

关键词 组合层板 杂交单元 应力计算 有限元

分类号 TH 133

在航空、机械、船舶、化工等许多领域中,为了使某个部件具有大的挠性,采用了组合层板的结构,如汽车工业中的减振弹簧,航空用的复合材料层板。在国内外广泛应用于船舶、航空和化工领域中的挠性膜片联轴器,其重要零件就是由多层很薄的薄片(0.2—0.5 mm)组合而成的,尽管这种联轴器在国外进口的设备中采用很多,但对这种组合层板在具有横向位移时的特性研究较少,本文对这种组合层板的受力特性和结构受力计算问题进行了研究。

假定组合层板的层数为 N 层, N 是任意的,各层的材料是任意的,可相同也可不同,但每层的厚度要均匀,各层间相互接触且满足滑移条件。如图 1 所示。

1 用杂交元理论来研究组合层板

1.1 杂交单元的建立

杂交单元用于求解 N 层任意材料的应力和位移,各层的厚度、材料的性能可以不同,但每层厚度相同,材料各向同性,载荷可以是力载也可以是热载,对载荷形式无特殊要求。

Hellinger-Reissner 变分泛函是该单元所依据的变分泛函,由此导出之单元模型为杂交单元模型。Hellinger-Reissner 泛函为:

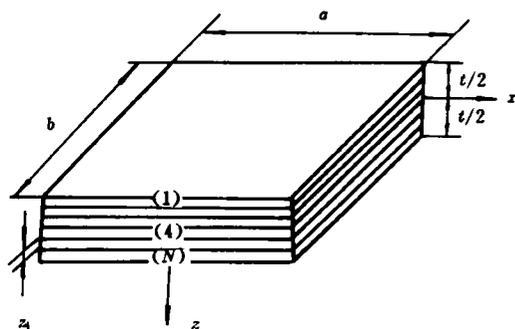


图 1 层板几何图形

收稿日期 1993 05 20 收修改稿 1993 07 05

本文联系人 王心丰 男 57 教授 210016 南京航空航天大学西 11 607 室

$$\Pi_R = \int_V [\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - B]dV - \int_V \bar{F}_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i ds \quad (1)$$

略去体力 $\int_V \bar{F}_i u_i dV$ 并用矢量表示。

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} - \{\sigma\}^T \{\epsilon_0\} dV - \int_{S_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds \\ &= \sum_M \sum_N \left(\int_{V_{mN}} [\{\sigma^i\}^T \{\epsilon^i\} - \frac{1}{2} \{\sigma^i\}^T [S^i] \{\sigma^i\} - \{\sigma^i\}^T \{\alpha^i\} \Delta T] dV - \int_{S_{\sigma_{mN}}} \{\bar{T}^i\}^T \{u^i\} ds \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 M 为单元数 N 为层数 $i = 1, 2, \dots, N; V_{mN}$ 为第 M 个单元中第 N 层的体积; $S_{\sigma_{mN}}$ 为第 M 个单元中第 N 层的力边界

$$\begin{aligned} \{\sigma^i\}^T &= (\sigma_x^i \ \sigma_y^i \ \sigma_z^i \ \sigma_{yz}^i \ \sigma_{xz}^i \ \sigma_{xy}^i) \\ \{\epsilon^i\}^T &= (\epsilon_x^i \ \epsilon_y^i \ \epsilon_z^i \ \epsilon_{yz}^i \ \epsilon_{xz}^i \ \epsilon_{xy}^i) \\ \{\alpha^i\}^T &= (\alpha_x^i \ \alpha_y^i \ \alpha_z^i \ \alpha_{yz}^i \ \alpha_{xz}^i \ \alpha_{xy}^i) \end{aligned}$$

$\{\bar{T}^i\}^T$ 为已知力边界; $\{u^i\}^T = (u^i, v^i, w^i)$, $[S^i]$ 为第 i 层材料弹性常数矩阵。

为了建立杂交单元模型, 每层假设一组应力参数 $\{\beta^i\}$, 使得各层应力 $\{\sigma_i\} = [P^i] \{\beta^i\}$, 此处 $[P^i]$ 为 i 层应力插值矩阵, 由此插值所得应力满足平衡方程, 且保证层间应力连续性及层板上下表面条件。

1.2 位移假设

由于可滑移, 故层间内面位移不连续, 采用直线假设时每层均有独立的位移 u_0, V_0 和转角 θ_x, θ_y , 因层间保持接触, 故挠度 W 在层间保持连续, 出于以上考虑, 第 i 层板之位移假设为:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{0i} + Z\theta_{xi} \\ V &= V_{0i} + Z\theta_{yi} \\ W &= W \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 u_{0i}, V_{0i} 为第 i 层中面位移, W 为横向位移, θ_{xi}, θ_{yi} 为第 i 层转角。那么则位移参量

$$\{\delta\}^T = (W, u_{01}, V_{01}, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, u_{0i}, V_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \dots) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \frac{1}{2}\theta_{x1}\Delta h_1 + \theta_{x2}\Delta h_2 + \dots + \theta_{xi}\Delta h_i + \frac{1}{2}\theta_{xi}\Delta h_i + Z\theta_{xi} \\ V &= V_0 + \frac{1}{2}\theta_{y1}\Delta h_1 + \theta_{y2}\Delta h_2 + \dots + \theta_{yi}\Delta h_i + \frac{1}{2}\theta_{yi}\Delta h_i + Z\theta_{yi} \\ W &= W \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 Δh_i 为第 i 层厚度。故形函数

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\Delta h_1}{2} & 0 & \Delta h_2 & 0 & \dots & \Delta h_{i-1} & 0 & (\frac{\Delta h_i}{2} + Z_i) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\Delta h_1}{2} & 0 & \Delta h_2 & \dots & 0 & \Delta h_{i-1} & 0 & (\frac{\Delta h_i}{2} + Z_i) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\{u\} = \frac{1}{|J|} [B^i] \{q\} = \frac{1}{|J|} ([B^1][B^2]\dots[B^i]) \{q\} \quad (7)$$

$$[B_j^T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & S_j & 0 & Z_i S_j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T_j & 0 & Z_i T_j & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ T_j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j |J| & 0 & \dots \\ S_j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_j |J| & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_j & S_j & Z_i T_j & Z_i S_j & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\{q\} = (u_0^i \quad V_0^i \quad W_0^i \quad O_{z1}^i \quad O_{y1}^i \dots O_{zr}^i \quad O_{y1}^i \dots u_0^s \quad V_0^s \quad W_0^s \quad O_{z1}^s \quad O_{y1}^s \dots O_{zr}^s \quad O_{y1}^s) \quad (9)$$

1.3 应力假设

各层应力插值 $\{\sigma^i\} = [P^i]\{\beta^i\}$ 可以不必满足弹性力学的平衡方程 $\sigma_{i,j,j} = 0$, 若能满足其单元性能将更好。通常, 先假设面内应力 $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_{xy}^i$ 为平面坐标 $x-y$ 的完全多项式, 然后通过平衡方程 $\sigma_{i,j,j} = 0$ 得出 $\sigma_z^i, \sigma_{iz}^i$ 和 σ_{iz}^i 的多项式

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i &= f_1(x, y) - \int \left(\frac{\partial \sigma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial y} \right) dz \\ \sigma_{yz}^i &= f_2(x, y) - \int \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^i}{\partial y} \right) dz \\ \sigma_z^i &= f_3(x, y) - \int \left(\frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial y} \right) dz \end{aligned}$$

式中 $f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)$ 为积分常数, 均为平面坐标 $x-y$ 的某次完全多项式, 其中 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 之次数与 $(\frac{\partial \sigma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial y})$ 多项式次数相同, 亦即低于面内应力 $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_{xy}^i$ 多项式一次, $f_3(x, y)$ 之次数与 $\frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial y}$ 多项式相同, 亦即低于面内应力 σ_x^i 等多项式二次。

若假设面内应力 σ_x^i (或 $\sigma_y^i, \sigma_{xy}^i$) 沿 Z 轴作 $W(Z)$ 变化, $\sigma_x^i = F(x, y) + W(Z)G(x, y)$ 则剪应力 $\sigma_{yz}^i, \sigma_{xz}^i$ 沿 Z 轴作 $W'(Z)$ 变化, $W'(Z)$ 之次数高于 $W(Z)$ 一次, 法向应力 σ_z^i 沿 Z 轴作 $W''(Z)$ 变化, $W''(Z)$ 之次数高 $W(Z)$ 二次。

由此求出的应力多项式必然满足平衡方程, 但是这样的插值应力多项式用于杂交单元模型未必能保证单元具有良好的性质, 它可能出现闭锁 (Locking) 现象、刚度矩阵病态, 不满足旋转不变性等, 因而不能取完全多项式, 参照 Spilker 所做的工作, 选取以下多项式。同时因层间可滑移, 故每层之上下表面 $Z_{r,z}, Z_{r,y} = 0$ 而 σ_z 在层间连续。

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= \beta_4 - \beta_{14}x - \frac{1}{2}\beta_{16}x^2 - 2\beta_7xy + \beta_6y^2 - \frac{1}{3}\beta_{19}x^3 - \beta_{20}x^2y - 3\beta_{21}xy^2 + \beta_9y^3 + \rho\{\beta_{22} + \beta_{23}x \\ &\quad + \beta_{24}y + \beta_{25}x^2 + \beta_{26}xy + \beta_{27}y^2 + \frac{3}{4}(\beta_2 - \beta_{43})x^2y + \beta_{28}xy^2\} \\ \sigma_y^i &= \beta_8 + \beta_9x - \beta_{13}y + \beta_{10}x^2 - 2\beta_{15}xy - \frac{1}{2}\beta_{16}y^2 + \beta_{11}x^3 - 3\beta_{18}x^2y - \beta_{19}xy^2 - \frac{1}{3}\beta_{20}y^3 \\ &\quad + \rho\{\beta_{29} + \beta_{30}x + \beta_{31}y + \beta_{32}x^2 + \beta_{33}xy + \beta_{34}y^2 + \beta_{35}x^2y + \frac{3}{4}(\beta_2 - \beta_{42})xy^2\} \\ \sigma_{xy}^i &= \beta_{12} + \beta_{13}x + \beta_{14}y + \beta_{15}x^2 + \beta_{16}xy + \beta_{17}y^2 + \beta_{18}x^3 + \beta_{19}x^2y + \beta_{20}xy^2 + \beta_{21}y^3 \\ &\quad + \rho\{\beta_{36} + \beta_{37}x + \beta_{38}y + \beta_{39}x^2 + \frac{3}{4}(\beta_2 - \beta_{41}) - \beta_{25} - \beta_{34}\}xy + \beta_{40}y^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^i &= \frac{t_i}{2}(1 - \rho^2)\{\beta_{31} + \beta_{37} + (\beta_{33} + 2\beta_{39})x + [\frac{3}{4}(\beta_1 - \beta_{41}) + \beta_{34} - \beta_{25}]y \\ &\quad + \beta_{35}x^2 + \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_{42})xy\} \\ \sigma_{rz}^{i-1} &= \frac{t_{i-1}}{2}(1 - \rho^2)\{\beta_{23} + \beta_{38} + [\frac{3}{4}(\beta_1 - \beta_{41}) + \beta_{25} - \beta_{34}]x + (\beta_{26} + 2\beta_{40})y \\ &\quad + \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_{42})xy + \beta_{28}y^2\} \\ \sigma_z^i &= \frac{t_i^2}{4}\{ \frac{1}{4}(1 - \rho)^2(2 + \rho)(\beta_1 + \beta_2x + \beta_3y) + \frac{1}{4}(1 + \rho)^2(2 - \rho) \\ &\quad \times (\beta_{41} + \beta_{42}x + \beta_{43}y) \} \end{aligned}$$

由此可见, 上式可满足各层上下表面 $Z_{zz}, Z_{rz} = 0$, 为满足 σ_z 层间 σ_z 连续, 只需令相邻两层 (i 和 $i-1$ 层) 某些应力参数匹配即可:

$$\beta_j^i = (\frac{t_{i-1}}{t_i})^2 \beta_{j+40}^{i-1} \quad j = 1, 2, 3$$

如上表面有载荷而下表面无载荷, 可令

$$\beta_j^i = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

经过以上 $\{\beta\}$ 的匹配与取舍, 上述条件均得到满足, 由此可得整板总应力参数。

$$\{\beta\}^T = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{13} \dots \beta_{41} \beta_{42} \dots \beta_{43} \dots)$$

以上是简单的介绍杂交元的基础理论, 下面将采用杂交单元层板理论计算几个算例。

2 几个算例

例 1, 如图 2 所示, 两层板叠合在一起, 板长 125 mm, 板宽 40 mm, 厚 0.2 mm, 一端固支, 一端自由, 且在自由端加载 $P, P = 738\ 000\ N$, 求各层表面的应力。部分结果示于表 1。

表 1 一端固支, 一端自由两层组合板表面应力计算结果

节点号	2	7	12	17	22	27
节点坐标	(0.1)	(2.1)	(4.1)	(6.1)	(8.1)	(10.1)
σ_z	0.26402E + 04	0.153077E + 04	0.140994E + 04	0.875028E + 03	0.450415E + 03	0.154470E + 00
σ_y	0.921806E + 03	-0.840173E + 02	0.192191E + 01	0.139224E + 02	-0.242248E + 01	0.160611E + 01
σ_x	-0.7837162E - 08	-0.223156E - 07	-0.16006E - 07	-0.138406E - 07	-0.987218E - 08	0.372381E - 09

注: 此为 $Z = 0.2$ 的上表面应力的部分计算结果。下表面数值相当, 符号为负, $Z = 0.0$ 的上、下表面相类同。

例 2, 如图 3 所示, 两端均为固支的二层板叠合在一起, 其他条件均与例 1 相同。求各层表面的应力。单元的划分, 节点的划分, 均与例 1 相同。各层板表面应力的计算部分结果示于表 2。

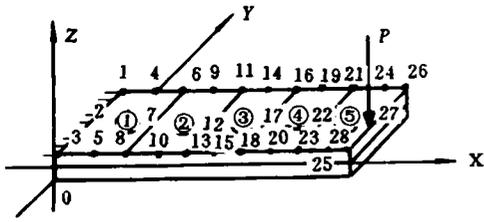


图 2 两层组合板
一端自由,一端固支

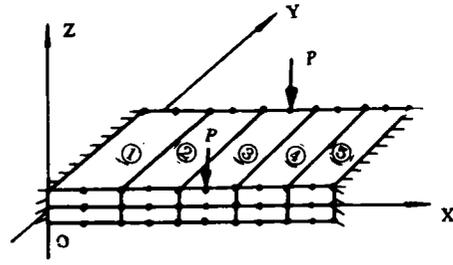


图 3 两层组合板
两端固支

表 2 两端固支两层组合板表面应力计算结果

节点号	2	7	12	17	22	27
节点坐标	(0.1)	(2.1)	(4.1)	(6.1)	(8.1)	(10.1)
σ_x	0.204538E + 05	0.142047E + 04	-0.915307E + 04	-0.915307E + 04	0.142047E + 04	0.204538E + 05
σ_y	0.714439E + 04	-0.120847E + 04	0.265402E + 04	0.265402E + 04	-0.120847E + 04	0.714439E + 04
σ_z	-0.147026E - 08	-0.255841E - 08	0.153204E - 07	0.142491E - 07	0.321452E - 07	0.565051E - 07

注:此为 $Z = 0.2$ 的上表面应力的部分计算结果。下表面数值极其相近,符号为负。 $Z = 0.00$ 上、下表面相类同。

例 3,如图 4 所示,三层两端均固支的层板叠合在一起,其他条件均同例 1,求各层表面的应力。

各层表面的应力计算部分结果示于表 3。

表 3 两端固支三层组合板表面应力计算结果

节点号	2	7	12	17	22	27
节点坐标	(0.1)	(2.1)	(4.1)	(6.1)	(8.1)	(10.1)
σ_x	0.204520E - 05	0.142426E + 04	-0.915584E + 04	-0.915584E + 04	0.142426E + 04	0.204520E + 05
σ_y	0.713391E + 04	-0.119326E + 04	0.265316E + 04	0.265313E + 04	-0.119326E + 04	0.713391E + 04
σ_z	-0.243112E - 08	-0.389173E - 08	0.146338E - 07	0.164429E - 07	0.266300E - 07	0.430882E - 07

注:此为 $Z = 0.3$ 的上表面应力的部分计算结果。下表面数值极其相近,符号为负。 $Z = -0.1$ 上、下表面相类同。

3 组合层板的实验

为了验证前面用杂交元建立起来的层板计算理论的正确性,特作下面试验:材料为 60Si₂A,厚度为 0.5 mm,层板的结构尺寸和电阻丝片贴的位置如图 5 所示。两端用各两个螺栓

和各一个圆柱销,将层板和凸凹台紧固,以形成两端固支联接。1、2、...8 分别贴有电阻丝片,中间位置加载荷,测试结果示于表 4。

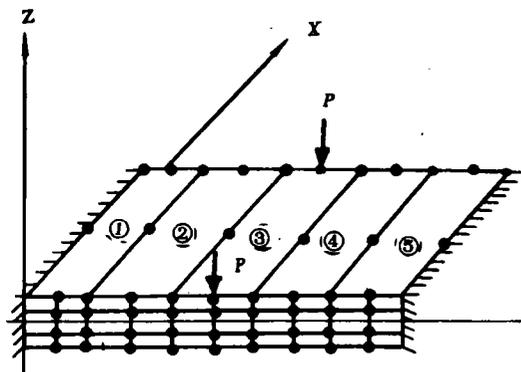


图 4 三层组合板
两端固支

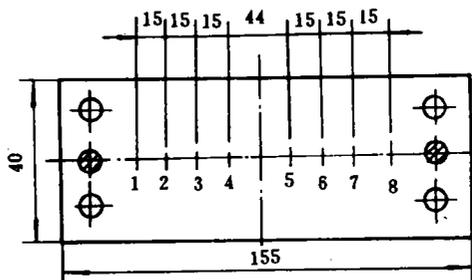


图 5 电阻丝片位置图

表 4 组合层板试验件应变试验测试结果

位移量 (mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.6	+ 135		+ 6	- 40	- 34	+ 35	+ 68	+ 102	- 45	+ 7	+ 46	+ 87	+ 50	- 6	- 34	- 72
1.0	+ 242		+ 29	- 30	- 10	+ 104	+ 127	+ 165	- 58	+ 43	+ 97	+ 145	+ 80	- 15	- 28	- 78
1.6	+ 396		+ 106	+ 55	+ 90	+ 240	+ 226	+ 250	- 40	+ 133	+ 184	+ 241	+ 160	+ 9	+ 26	- 34
2.0	+ 497		+ 183	+ 148	+ 175	+ 341	+ 300	+ 308	- 7	+ 211	+ 251	+ 311	+ 229	+ 55	+ 90	+ 30

表中序号 1,2,3,...8 是上表面的应变值,9,10,11,...16 是下表面的应变值。做实验时,先作单层,测上下表面,后作二层,测第一层的上表面,第二层的下表面,然后作三层、四层,测第一层的上表面,第四层的下表面,表 4 是测试数据的一部份,每一层的数据相类同,只不过是层数越多,下表面的滞后现象愈严重,这是因为试验板不平,试验板层之间存在摩擦之故,基本呈“单片特性”。同时小位移呈线性关系,大位移呈非线性关系。最大应变点也有所变化,开始是在端部,后出现下表面的中部,呈“膜特性”。

4 几点结论

从理论计算结果和实验结果的比较可以得出以下几点结论:

1. 从实验结果可以看出,多层板的弯曲(在这种尺寸范围情况下)基本上是绕每层板的中性平面弯曲的,理论计算结果也证明了这一点。说明理论计算是正确的,而且也说明了多层板呈“单片”特性。

2. 从实验结果看出,无论是单层还是多层,下表面的应力增加,总是滞后于上表面,且层数越多滞后愈明显。但作用相同位移时,单层层板的应力值和多层板的第一层的应力值是基本相同的。

3. 层板位移不大时,薄板的弯曲呈线性关系,当位移量加大时呈非线性关系。

4. 层板受载时,其变形和应力图如图 6 所示。在小位移时,近固支处的上表面应力最大。在大位移时,最大应力发生在下表面中间位置,呈现“膜”特性。

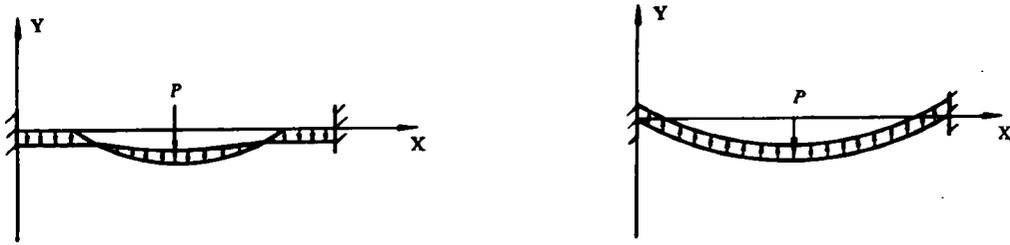


图 6 小位移和大位移时的变形图

参 考 文 献

- 1 方鸿慧. 挠性叠片联轴器研究. 南京航空航天大学硕士研究生论文, 1990 年 3 月
- 2 舒小平. 复合材料力学特性研究. 南京航空航天大学硕士研究生论文, 1989 年 3 月
- 3 Rothfuss N B. Desigs and application of flexible diaphragm coupling to industrial—marine gas turbines. An ASME Publication Feb. 1974
- 4 “International Conference on flexible couplings for high power and Speeds”, 1977, paper 01.02

研 制 动 态

1 米长末级叶片

据“火力原子力发电”1993 年 8 月号报道,日本中部电力公司和东芝公司已共同研制了钛合金 1016mm 末级长叶片,以便提高传统的装有 851mm 末级叶片的 700MW 汽轮机的效率。

这种新型叶片从 1991 年 10 月起已在日本碧南火力发电厂 1 号机组,以及从 1990 年 7 月起已在日本知多火力发电厂 4 号机组上投入运行,从而这二台机组已成为世界上大型汽轮机中成功应用钛合金叶片的先导机组。

本文描述了该长叶片技术设计的要点和基于上述二台机组经验的运行结果。

(学牛 供稿)

cessed were the heat transfer data of the high-pressure two-phase steam/water flow in $\Phi 32 \times 3$ mm slightly inclined tubes and satisfactory results have been obtained. **Key words:** *temperature field, source item, two-phase flow, heat release factor, boundary conditions, model*

- (98) **Numerical Simulation of Water Film Flow on a Rotating Plate** Li Xuelai (*Harbin Marine Boiler & Turbine Research Institute*)

A numerical simulation is conducted of water film flows on a steam flow-swept rotating plate. The speed distribution of such water film flows has been determined along with the water film thickness distribution variation relationship. **Key words:** *rotating plate, water film, steam turbine, wetness removal*

- (104) **An Investigation of Built-up Laminated Sheet Characteristics under the Condition of Transverse Displacements** Wang Xinfeng, Fang Honghui (*Nanjing Aeronautical Institute*)

By the use of Hellinger-Reissner variation functional the authors present a hybrid single-element model of multi-layer thin sheets and have made an analytical computation of the characteristics of built-up laminated sheets based on the use of hybrid single elements in the presence of transverse displacements. The correctness of the computation method has been corroborated by experiments. **Key words:** *built-up laminated sheet, hybrid single element, stress, calculation*

- (111) **An Exploratory Investigation of the Computer-Based Control of Utility Coal-Fired Boiler Furnace Combustion** Zhou Huaichun, Han Caiyuan (*Key National Laboratory for Coal Combustion Research at Central China Polytechnical University*)

In this paper is discussed the problem concerning the coal-firing system computer-based control for utility coal-fired boilers through the use of conventional control techniques. The authors focus on the following aspects: simulation research approaches, proper PID parameter setting method, the compensation of measurable internal perturbation by the fuel control loop, the treatment of nonlinear fan regulation valve in the air flow rate control loop. Some new understanding as regards a new type of combustion control mode is also presented. **Key words:** *boiler, combustion control, computer applications*

- (117) **Rapid Determination of Coal's Proximate Analysis with the Help of a Thermogravimetric Method** Zhu Qunyi, Zhao Guangbo, Huang Yimin, Chen Chongsu, Yu Hongbin (*Harbin Institute of Technology*)

The authors explore the possibility of determining coal's proximate analysis with the aid of thermogravimetric method and present the test conditions and results. It is found that the results of proximate analysis based on the TG method are in good agreement with those obtained with a standard method. **Key words:** *thermal balance, thermogravimetric method, coal's proximate analysis*

- (121) **The Finite-Time Thermodynamic Performance of Heat Pump Plants with the Heat Leak Effect being Taken into Account** Chen Lingen, Sun Fengrui, Chen Wenzhen (*Wuhan Naval Academy of Engineering*)