

# 叶栅流场计算的新方法

惠兆森

[提要] 本文介绍了近年来基于广义变分原理和有限元素法发展起来的一种新的数值计算方法——边界元素法。并详细阐述了边界元素法的基本原理,探讨了其数值计算技术。试算表明,边界元素法对涉及场问题的解决具有独特的优点。

主题词 边界元素法 叶栅 流场 计算

主要符号

$L( )$ —— 算子	$\phi$ —— 势函数
$S( )$ —— 函数项	$\beta$ —— 气流角
$G( )$ —— 导数项	$x, y$ —— 座标
$u, W$ —— 函数	$M$ —— 马赫数

## 一、前言

众所周知,有限元素法已经得到了越来越广泛的应用。近年来,在对有限元法深入研究过程中,国外学者提出了一种选取权函数的新方法。由于所选权函数的特点,使得方程只与边界情况有关,简称边界元方法。与有限元素法比较,边界元方法所占存贮单元少,计算时间短,且程序简单易于编制。在弹性力学、电磁学、传热学、流体力学等领域都受到了高度重视,在应用上取得了可喜的进展。

国内外边界元方法的研究还处于起步阶段。本文阐述了边界元方法的基本原理,探讨了求解平面叶栅绕流问题的数值计算技术。算例表明了该方法的优点。

## 二、基本原理

假设我们的方程在内部区域:

$$L(u) = 0 \quad x, y \in \Omega \quad (1)$$

在边界上、

$$\begin{aligned} S(u) &= s & x, y \in \tau_1 \\ G(u) &= g & x, y \in \tau_2 \end{aligned} \quad (2)$$

总的边界  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 。

由二次泛函变分原理，可以得加权剩余积分：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(u) w d\Omega &= \int_{\tau_2} (G(u) - g) S(w) d\tau - \\ &- \int_{\tau_1} (S(u) - s) G(w) d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

两次分部积分左端得：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u L(u) d\Omega &= \int_{\tau_1} S G(w) d\tau + \int_{\tau_2} S(u) G(w) d\tau - \\ &- \int_{\tau_2} g S(w) d\tau - \int_{\tau_1} G(u) S(u) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

此时，如果函数  $W$  为函数  $u$  的变分  $\delta u$ ，则 (4) 式就是大家所熟知的有限元基本方程。现在，我们取函数  $W$  满足

$$\nabla^2 w = \Delta i \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (4) 式得：

$$\begin{aligned} u_i &= \int_{\tau_1} S G(w) d\tau + \int_{\tau_2} S(u) G(w) d\tau - \int_{\tau_2} g G(w) d\tau - \\ &- \int_{\tau_1} G(u) S d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

显然，方程左边是计算域中（包括边界）任一点函数值，方程右边仅与边界状况有关。这就是所谓的边界元素方法。

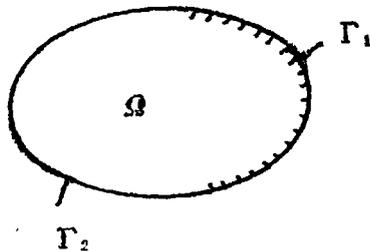


图 1

### 三、势函数基本方程

无粘、不可压流势函数基本方程为：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad x, y \in \Omega \quad (7)$$

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8)$$

如图2。在ah和de上

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{ah} = -V_1 \cos \beta_1 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{de} = V_1 \cos \beta_1 \quad (10)$$

在bc和gf上

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (11)$$

其余边界上

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_A = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{A'} \quad (12)$$

$$\phi \Big|_A = \phi \Big|_{A'} + C$$

为方便公式推导，记ah和de边界为 $\tau_2$ ，其余为 $\tau_1$ 、总的边界为 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 。

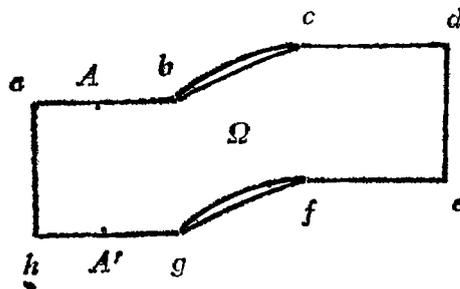


图2

## 四、边界积分方程的建立

根据方程 (3) 有

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi W d\Omega = \int_{\tau_2} (q - \bar{q}) W d\tau - \int_{\tau_1} q^* (\phi - \phi^*) d\tau \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial \phi}{\partial n}, & q^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial n}, \\ \phi \Big|_{\tau_1} &= \phi^*, & q \Big|_{\tau_2} &= \bar{q}_0. \end{aligned} \quad (14)$$

将 (13) 式左端分部积分

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi W d\Omega = \int_{\tau} W \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla W d\Omega \quad (15)$$

考虑到 (15) 式的对称性, 再次分部积分得:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 \phi W d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla^2 W \phi d\Omega + \int_{\tau} W \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau - \\ &- \int_{\tau} \phi \frac{\partial W}{\partial n} d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (13) 式得:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 W \phi d\Omega + \int_{\tau} W \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau - \int_{\tau} \phi \frac{\partial W}{\partial n} d\tau \\ = \int_{\tau_2} W (q - \bar{q}) d\tau - \int_{\tau_1} q^* (\phi - \phi^*) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

选取权函数  $W$

$$W = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (18)$$

式中  $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$  为点  $P$  至边界任一点  $Q$  之间的距离。

这样, 方程 (17) 可化为:

$$\phi_i = \int_{\tau} \frac{\partial W}{\partial n} \phi d\tau - \int_{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial n} W d\tau \quad (19)$$

当 $P$ 点趋近于边界时, 积分  $\int_{\tau} \phi \frac{\partial W}{\partial n} d\tau$  是奇异的, 可由高斯积分处理。

令

$$C_i = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\tau} \frac{\partial W}{\partial n} \phi d\tau = \begin{cases} 0 & x, y \in \bar{\Omega} \\ \frac{1}{2} & \in \tau \\ 1 & \in \Omega \end{cases} \quad (20)$$

所以, 方程 (19) 可写成更一般的形式:

$$C_i \phi_i = \int_{\tau} W \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau - \int_{\tau} \phi \frac{\partial W}{\partial n} d\tau \quad (21)$$

在边界上, 方程 (21) 是  $\phi$  和  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  必须满足的一个约束条件, 或者  $\phi$  已知, 或者  $q$  已知。由此可求出全部边界参数。

## 五、边界方程的数值化

将边界  $\tau$  分成  $n$  个小单元, 在每个小单元上,  $\phi$  和  $q$  均为常量, 以单元中点为节点, 单元中点值代表单元的值。

$$C_i \phi_i = \sum_{j=1}^n \int_{\tau_j} W d\tau \cdot q_j - \sum_{j=1}^n \int_{\tau_j} \frac{\partial W}{\partial n} \cdot \phi_j \quad (22)$$

令

$$H_{i,j} = \int_{\tau_j} \frac{\partial W}{\partial n} d\tau \quad i \neq j$$

$$H_{i,i} = \int_{\tau_i} \frac{\partial W}{\partial n} d\tau + C_i \quad i = j$$

$$G_{i,j} = \int_{\tau_j} W d\tau$$

(22) 式可简写为:

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \phi_j = \sum_{j=1}^n G_{i,j} q_j \quad (23)$$

对每一个节点都有这样一个方程，共 $n$ 个。以矩阵表示：

$$H \cdot \phi = G \cdot Q \quad (24)$$

式中：  
 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$   
 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$

$H$ 、 $G$ 均为与几何参数有关的 $n \times n$ 阶矩阵。

方程(24)展开：

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

将未知量移至左边，已知量移至右边，重新排列，可得方程组：

$$AX = F \quad (26)$$

式中： $X$ 为未知向量， $F$ 为已知向量， $A$ 为系数矩阵。

求解时先假定一个出气角 $\beta_2$ ，解出方程后，利用库塔条件调整 $\beta_2$ ，直到满足给定精度为止。

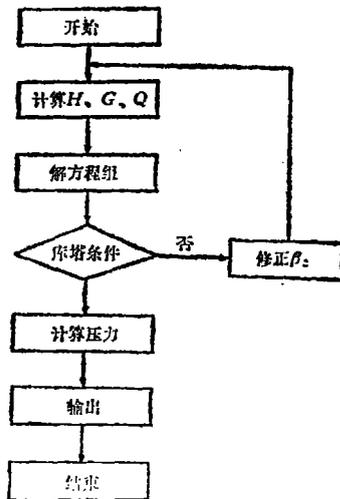


图3 计算框图

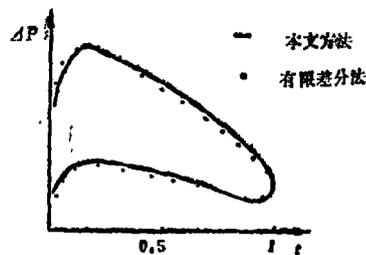


图4 计算结果比较

图4是对 $A_{40}$ 叶型的计算结果同有限差分方法计算结果的比较。图上可见，边界元方法具有良好的精度。算例的叶栅进口马赫数为 $M=0.2$ ，叶栅进口气流角 $\beta_1=42^\circ$ 。

## 结 束 语

1. 本文阐述了边界元方法的基本原理, 并对平面叶栅进行了计算, 取得良好结果。
2. 边界元方法具有程序简单, 存储容量要求低, 计算速度快等优点。
3. 对于解决“场的计算问题”较其它方法实用。

## 参 考 文 献

- [1] C.A.Brebbia: “The boundary element method for engineers”, Pentech press, London 1978.
- [2] C.A. Brebbia: “progress in Boundary Element Methods”, Pentech press, London 1981.

A NEW METHOD FOR CALCULATING TWO-DIMENSIONAL  
CASCADE FLOW FIELDS

Hui Zhaosen

## Abstract

This paper describes a new numerical method-boundary element method, which has been developed in recent years, based on the generalized variation principle and finite element method. The basic principles of boundary element method have been explained in detail and the relevant numerical techniques discussed. Test calculations have shown that the boundary element method has unique merits when used in solving flow field problems.

**Key words:** boundary element method, cascades, flow fields, calculations.